**Лекция № 2 «Функции нескольких переменных»**

### *§1 Дифференциал функции*

Для функции одной переменной  дифференциал функции определялся как главная, линейная относительно , часть приращения функции, равная произведению .

Обобщим данное определение для функции двух переменных.

*Опр.* ***Полным дифференциалом функции***  называется главная часть приращения функции, линейная относительно  и , т.е.

 (1)

Выражения  и  называют частными дифференциалами. Ранее было показано, что для независимых переменных *х* и *у* имеют место равенства  и . Тогда равенство (1) примет вид .

Рассмотрим без доказательства две теоремы.

*Теорема1*. Если функция  дифференцируема в точке , то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные ,  и выполняются равенства , .

*Теорема 2.* Если функция  имеет непрерывные частные производные  и  в точке , то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

 (2) или  (3).

Арифметические свойства и правила нахождения дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

*Пример 1.* Найти полный дифференциал функции .

*Решение.*Найдем частные производные функции

.

### .

### Применим формулу (3), получим:

.

Полный дифференциал функции называют также *дифференциалом первого порядка*. Если функция  имеет непрерывные частные производные второго порядка, то можно найти *дифференциал второго порядка*, применив формулу

 (4).

Дифференциалы, порядок которых выше первого, называют *дифференциалами высших порядков.*

### *Пример 2.* Найти дифференциал второго порядка для функции .

### *Решение.* Найдем производные первого порядка

 . .

Найдем производные второго порядка

, , .

Применим формулу (4) 

### *§2 Производная по направлению. Градиент функции*

Пусть функция  определена в некоторой окрестности точки , *l* – некоторое направление, задаваемое единичным вектором , где  - направляющие косинусы вектора .

При перемещении в данном направлении *l* точки в точку  функция  получит приращение  называемое *приращением функции в направлении l* .

*Опр. 1.* ***Производной функции*** ***по направлению l*** называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения  при стремлении последней к нулю, т.е. .

Производная  характеризует скорость изменения функции в направлении *l*. Рассмотренные ранее частные производные  и  представляют собой производные по направлениям, параллельным соответственно осям *Ох* и *Оу*.

Примем без доказательства формулу для нахождения производно по направлению  (5).

При вычислении производной по направлению полезны формулы

.

*Пример1.* Вычислить производную функции  в точке  по направлению вектора  где 

*Решение.* Найдем координаты вектора  и его направляющие косинусы.



Находим частные производные функции их значения в точке *М*(1; 2)

 

Применяем формулу (5) 

*Опр. 2.* ***Градиентом функции***  называется вектор с координатами .

Обозначают вектор градиента одним из следующих способов .

Рассмотрим *физический смысл* вектора градиента. Найдем скалярное произведение вектора  и единичного вектора направления *l* .

Получим: Сравнив полученное равенство с равенством (5) получим, что  Известно, что скалярное произведение двух векторов максимально, если они одинаково направлены. Следовательно, *градиент функции в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.* Таким образом, из всех направлений на плоскости в данной точке в направлении вектора градиента функция растет быстрее всего и имеет место формула



*Пример 2.* Найти градиент функции , его модуль и производную в направлении градиента в точке *М*(0; -1).

*Решение.* Находим частные производные функции и их значения в точке *М*.





Тогда градиент функции равен .

### *§3 Касательная плоскость и нормаль к поверхности*

Пусть функция  дифференцируема в некоторой области *D*, точка .

*x*

*y*

*z*

*x0*

*y0*

*M0*

*O*

*β*

*α*

*Рисунок 1*





Пересечем поверхность *S*, изображающую функцию. плоскостями  Плоскости пресекают поверхность *S* по линиям и  к каждой из которых в силу дифференцируемости функции в точке  можно провести касательные *l1* и *l2* (рис. 1)

Прямые *l1* и *l2* определяют плоскость  которая называется ***касательной плоскость****ю* к поверхности *S* в точке *М*.

Получим уравнение этой плоскости. Так как плоскость проходит черед точку  будем искать ее уравнение в виде Преобразуем данное уравнение к виду 

Найдем коэффициент *А1*. Касательная *l2* лежит в плоскости , следовательно, координаты точек касательной удовлетворяют уравнению плоскости, поэтому имеет место система уравнений . Решая систему. получим 

Аналогично получим 

Подставим полученные выражения в уравнение касательной плоскости, тогда уравнение примет следующий вид:

 (6).

Прямая, проходящая через точку и перпендикулярная касательной плоскости, построенной к этой поверхности, называется ***нормалью.***

Уравнение нормали можно получить в каноническом виде, используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (направляющий вектор прямой будет нормальным вектором для плоскости). Тогда уравнение нормали:

 (7)

*Пример.* Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  в точке 

*Решение.* Найдем частные производные функции, их значения в точке *М* и воспользуемся уравнениями (6) и (7).

 





Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 9, параграф 44, п. 44.3, 44.5, параграф 45.
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 15 п. 15.4,15.5.